Ιδιότητες: Αν A, B δύο σύνολα, $\sigma \subseteq A \times B$, $g \subseteq A \times B$. Τότε:

(i) $\sigma \subseteq g \iff \sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

(ii) $D(\sigma) - D(g) \subseteq D(\sigma - g)$

(iii) $R(\sigma) - R(g) \subseteq R(\sigma - g)$

(iv) $(\sigma \cup g)^{-1} = \sigma^{-1} \cup g^{-1}$

(v) $(\sigma \cap g)^{-1} = \sigma^{-1} \cap g^{-1}$

(vi) $(\sigma - g)^{-1} = \sigma^{-1} - g^{-1}$

(vii) $(\sigma \triangle g)^{-1} = \sigma^{-1} \triangle g^{-1}$

(viii) Αν $A = B$ κ' ισχύει $\sigma \subseteq \sigma^{-1}$, τότε $\sigma = \sigma^{-1}$

Αποδεικνύουμε ενδεικτικά κάποιες από αυτές:

(i) $\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma \subseteq g$

Έστω $(x,y) \in \sigma^{-1} \Rightarrow (y,x) \in \sigma \Rightarrow (y,x) \in g \Rightarrow (x,y) \in g^{-1}$. Άρα $\sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma^{-1} \subseteq g^{-1}$

$(x,y) \in \sigma \Rightarrow (y,x) \in \sigma^{-1} \Rightarrow (y,x) \in g^{-1} \Rightarrow (x,y) \in g$. Άρα $\sigma \subseteq g$

(ii) $x \in D(\sigma) - D(g)$

$\Rightarrow x \in D(\sigma) \wedge x \notin D(g)$

$\Rightarrow [\exists y \in B : (x,y) \in \sigma] \wedge [\forall b \in B \ (x,b) \notin g]$

$\Rightarrow \exists y \in B \ [(x,y) \in \sigma \wedge (x,y) \notin g]$.

$\Rightarrow \exists y \in B \ (x,y) \in \sigma - g$, τότε

$\Rightarrow x \in D(\sigma - g)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Δεν ισχύει πάντα ισότητα στη (ii)

$A = \{1, 2\}$ $\quad B = \{a, b\}$

$\sigma = \{(1,a)\}$ $\quad g = \{(1,b)\}$

$D(\sigma) = \{1\}$ $\quad D(g) = \{1\}$

$D(\sigma) - D(g) = \varnothing$

$\sigma - g = \{(1,a)\}$ κ' $D(\sigma - g) = \{1\}$

(iii) Ομοίως

(iv) $(x,y) \in (\sigma \cup g)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in \sigma \cup g \Leftrightarrow (y,x) \in \sigma$ ή $(y,x) \in g$
$\Leftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1}$ ή $(x,y) \in g^{-1} \Leftrightarrow (x,y) \in \sigma^{-1} \cup g^{-1}$

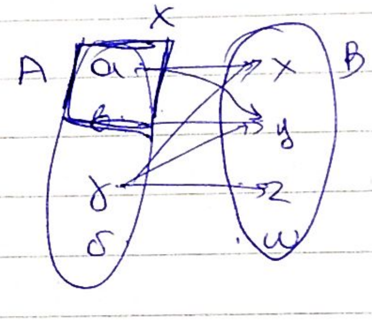
(v) Ομοίως
(vi), (vii) εύκολα

(viii) Αρκεί ν.δ.ο. $\sigma^{-1} \subseteq \sigma$ (διότι τότε, εφόσον $\sigma \subseteq \sigma^{-1}$ θα έχουμε $\sigma = \sigma^{-1}$)

Εφόσον $\sigma \subseteq \sigma^{-1}$ από το (i) συμπεραίνουμε ότι $\sigma^{-1} \subseteq (\sigma^{-1})^{-1}$ δηλαδή $\sigma^{-1} \subseteq \sigma$.
Άρα ισχύει.

Περιορισμός μιας σχέσης σ:
Αν $\sigma \subseteq A \times B$ είναι μια σχέση κ' $X \subseteq A$, τότε ο περιορισμός της σ στο X είναι η σχέση $\sigma_X \subseteq X \times B$ που ορίζεται $\sigma_X = \sigma \cap (X \times B)$

Στο αρχικό μας πχ
$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$
$B = \{x, y, z, \omega\}$
$\sigma = \{(\alpha,x), (\alpha,y), (\beta,y), (\gamma,x), (\gamma,y), (\gamma,z)\}$.



Αν $X = \{\alpha, \beta\}$

$\sigma_X = \{(\alpha,x), (\alpha,y), (\beta,y)\}$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

5) $A_1 = \emptyset$
$\boxed{A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n) - A_n}$

$A_2 = \mathcal{P}(A_1) - A_1 = \{\emptyset\} - \emptyset = \{\emptyset\}$

$A_3 = \mathcal{P}(A_2) - A_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\} - \{\emptyset\}\} = \{\{\emptyset\}\}$

$A_4 = \mathcal{P}(A_3) - A_3 = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} - \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$

$A_5 = \mathcal{P}(A_4) - A_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\} - \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} =$

$= \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}$

4) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$A_1 = \emptyset$, $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$

Να βρεθούν τα $A_2, A_3, A_4, \mathcal{P}(A_3)$

Λύση:

$A_2 = A_1 \cup \{A_1\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$A_3 = A_2 \cup \{A_2\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$A_4 = A_3 \cup \{A_3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

$\mathcal{P}(A_3) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

8) α) A, B, Γ τρία σύνολα κ' ισχύει $B \times \Gamma = A \times A$. Νδο $B \cap \Gamma = A$

Απόδειξη: Έστω τυχόν x.

$x \in B\cap\Gamma \Leftrightarrow x\in B \wedge x \in \Gamma \Leftrightarrow (x,x) \in B\times\Gamma \Leftrightarrow (x,x)\in A\times A$

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \Leftrightarrow x \in A$. Άρα $\boxed{B\cap\Gamma = A}$

ii) Αν X, Y είναι μη κενά σύνολα κ' ισχύει $(X\times Y)\cup(Y\times X) \subseteq A\times A$

Νδο $X\cup Y \subseteq A$

Απόδειξη: Επειδή τα X, Y είναι μη κενά, $\exists x\in X$ κ' $\exists y \in Y$

Νδο $X\cup Y \subseteq A$

Έστω $a \in X\cup Y$. Τότε $a\in X$ ή $a \in Y$

1η περίπτωση: $a\in X$. Τότε $(a,y)\in X\times Y$

άρα, αφού $X\times Y \subseteq (X\times Y)\cup(Y\times X) \subseteq A\times A$

προκύπτει $(a,y)\in A\times A$ άρα $a\in A$ (κ' $y \in A$)

2η περίπτωση: $a \in Y$

Τότε $(x,a) \in X \times Y$ κ' επίσης $X \times Y \subseteq (X \times Y) \cup (Y \times X) \subseteq A \times A$ προκύπτει ότι $(x,a) \in A \times A$, άρα ($x \in A$ κ') $a \in A$. Επομένως $X \times X \subseteq A$

γ) Ν.δ.ο (χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα) ότι η υπόθεση ότι X, Y μη κενά δεν μπορεί να παραλειφθεί στο (β) ερώτημα.

Απάντηση: $X = \emptyset$, $Y = \{1,2\}$, $A = \{1\}$. Τότε $(X \times Y) \cup (Y \times X) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \subseteq A \times A$

Ενώ δεν ισχύει $X \cup Y \subseteq A$

$X \cup Y = \{1,2\}$ $A = \{1\}$

δ) Αν $A \times A \subseteq (X \times Y) \cup (Y \times X)$ Ν.δ.ο $A \subseteq A \cap Y$

Απάντηση: Έστω τυχόν A

Αν $a \in A \Rightarrow a \in A \wedge a \in A \Rightarrow (a,a) \in A \times A$.

άρα $(a,a) \in (X \times Y) \cup (Y \times X)$

$\Rightarrow (a,a) \in X \times Y$ ή $(a,a) \in Y \times X$

$\Rightarrow (a \in X \wedge a \in Y)$ ή $(a \in Y \wedge a \in X)$

$\Rightarrow a \in X \cap Y$ ή $a \in X \cap Y$

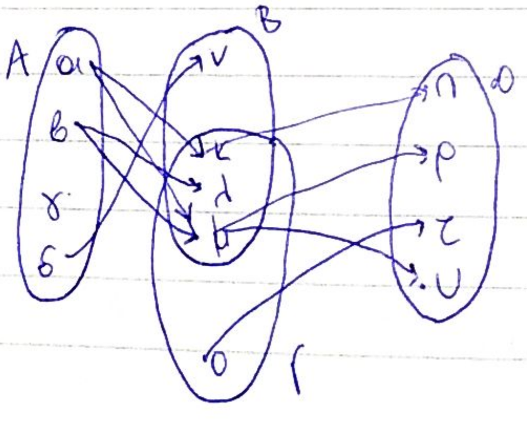
$\Rightarrow a \in X \cap Y$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΟ ΣΧΕΣΕΩΝ

Αν $\sigma \subseteq A \times B$

$\rho \subseteq \Gamma \times \Delta$ δύο σχέσεις, τότε η σύνθεση των σ, ρ είναι η σχέση

$\rho \circ \sigma = \{(x,y) \in A \times \Delta : \exists z \in B \cap \Gamma \; (x,z) \in \sigma$ κ' $(z,y) \in \rho\}$



$A = \{a, \beta, \gamma, \delta\}$ $\sigma = \{(a,\kappa), (a,\mu), (\beta,\lambda), (\beta,\mu), (\delta,\nu)\}$

$B = \{\kappa, \lambda, \mu, \nu\}$ $\tau = \{(\kappa,\pi), (\mu,\rho), (\mu,\upsilon), (o,\varsigma)\}$

$\Gamma = \{\kappa, \lambda, \mu, o\}$ $\tau\circ\sigma = \{(a,\pi), (a,\upsilon), (\beta,\upsilon), (a,\rho), (\beta,\rho)\}$

$\Delta = \{\pi, \rho, \varsigma, \upsilon\}$

<u>Πρόταση</u>: Αν $\sigma \subseteq A\times B$, $\tau \subseteq \Gamma\times\Delta$ δύο σχέσεις. Τότε $(\tau\circ\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\circ\tau^{-1}$

<u>Απόδειξη</u>: $(y,x)\in(\tau\circ\sigma)^{-1} \Leftrightarrow (x,y)\in\tau\circ\sigma \Leftrightarrow \exists z\in B\cap\Gamma\ (x,y)\in\sigma\wedge(z,y)\in\tau \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists z\in\Gamma\cap B\ (z,x)\in\sigma^{-1}\wedge(y,z)\in\tau^{-1} \Leftrightarrow (y,x)\in\sigma^{-1}\circ\tau^{-1}$

<u>Πρόταση</u>: Αν $\sigma\subseteq A\times B$, $\tau\subseteq\Gamma\times\Delta$, $g\subseteq E\times Z$ είναι τρεις σχέσεις
Τότε $(g\circ\tau)\circ\sigma = g\circ(\tau\circ\sigma)$.

<u>Απόδειξη</u>: Παραλείπεται

<u>ΔΙΜΕΛΗΣ ΣΧΕΣΕΙΣ</u>

Διμελής σχέση σε ένα σύνολο E ονομάζεται κάθε σχέση $\sigma\subseteq E\times E$

<u>Ορισμοί</u>: Μια διμελής σχέση $\sigma\subseteq E\times E$ καλείται:

(i) <u>Ανακλαστική</u>: (αυτοπαθητική)
αν $\forall x\in E$ ισχύει $x\sigma x$

(ii) <u>Συμμετρική</u>: Αν $\forall x,y\in E$ ισχύει η συνεπαγωγή $x\sigma y \Rightarrow y\sigma x$

(iii) <u>Αντισυμμετρική</u>: Αν $\forall x,y\in E$ ισχύει το εξής:
$[(x\sigma y)\wedge(y\sigma x)] \Rightarrow x=y$

(iv) <u>Μεταβατική</u>: αν $\forall x,y,z\in E$ ισχύει το εξής:
$(x\sigma y)\wedge(y\sigma z) \Rightarrow x\sigma z$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω $\sigma \subseteq E\times E$ μία σχέση

σ αυτοπαθής $\Leftrightarrow \forall x\in E \; x\sigma x$

σ συμμετρική $\Leftrightarrow \forall x,y\in E\,(x\sigma y \Rightarrow y\sigma x)$

σ αντισυμμετρική $\Leftrightarrow \forall x,y\in E\,[(x\sigma y \wedge y\sigma x) \Rightarrow x=y]$

σ μεταβατική $\Leftrightarrow \forall x,y,z\in E\,[(x\sigma y \wedge y\sigma z) \Rightarrow x\sigma z]$

σ μη αυτοπαθής $\Leftrightarrow \exists x\in E \; x\not\sigma x$

σ μη συμμετρική $\Leftrightarrow \exists x,y\in E\,(x\sigma y \wedge y\not\sigma x)$

σ μη αντισυμμετρική $\Leftrightarrow \exists x,y\in E\,(x\sigma y \wedge y\sigma x \wedge x\neq y)$

σ μη μεταβατική $\Leftrightarrow \exists x,y,z\in E\,(x\sigma y \wedge y\sigma z \wedge x\not\sigma z)$

Πρόταση: Έστω σ μία οποιαδήποτε σχέση στο E.

(i) σ αυτοπαθής $\Leftrightarrow \Delta_E \subseteq \sigma$

(ii) σ συμμετρική $\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1}$

(iii) σ αντισυμμετρική $\Leftrightarrow \sigma\cap\sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$

(iv) Η σ είναι μεταβατική $\Leftrightarrow \sigma\circ\sigma \subseteq \sigma$

Απόδειξη: (i) σ αυτοπαθής $\Leftrightarrow \forall x\in E \; x\sigma x \Leftrightarrow \forall x\in E\; (x,x)\in\sigma \Leftrightarrow$
$\{(x,x) : x\in E\} \subseteq \sigma \Leftrightarrow \Delta_E \subseteq \sigma$

(ii) $\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι σ συμμετρική
$(x,y)\in\sigma \Rightarrow x\sigma y \Rightarrow y\sigma x \Rightarrow (y,x)\in\sigma \Rightarrow (x,y)\in\sigma^{-1}$, Έτσι αποδείξαμε ότι $\sigma\subseteq\sigma^{-1}$
Έτσι αποδείξαμε ότι $\boxed{\sigma\subseteq\sigma^{-1}}$
$(x,y)\in\sigma^{-1} \Rightarrow (y,x)\in\sigma \Rightarrow y\sigma x \Rightarrow x\sigma y \Rightarrow (x,y)\in\sigma$, έτσι δ.ο. $\sigma^{-1}\subseteq\sigma$, επομένως $\sigma=\sigma^{-1}$
$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma=\sigma^{-1}$
Για τυχαία $x,y\in E$ $\; x\sigma y \Rightarrow (x,y)\in\sigma \Rightarrow (x,y)\in\sigma^{-1} \Rightarrow (y,x)\in\sigma \Rightarrow y\sigma x$
Άρα η σ είναι συμμετρική.

(iii) $\Rightarrow$ Έστω ότι η σ είναι αντισυμμετρική $(x,y)\in\sigma\cap\sigma^{-1} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(x,y)\in\sigma\\(x,y)\in\sigma^{-1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}(x,y)\in\sigma\\(y,x)\in\sigma\end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix}x\sigma y\\y\sigma x\end{matrix}\right\} \Rightarrow x=y$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$

Έστω τυχόντα $x, y \in E$. Αν $x\sigma y \wedge y\sigma x$ ότι $((x,y)\in\sigma \wedge (y,x)\in\sigma) \Rightarrow$

$(x,y)\in\sigma \wedge (x,y)\in\sigma^{-1} \Rightarrow (x,y)\in\sigma\cap\sigma^{-1} \Rightarrow (x,y)\in\Delta_E \Rightarrow x=y$.

Άρα σ αντισυμμετρική.

(iv) $\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι η σ είναι μεταβατική

$(x,y)\in\sigma\circ\sigma \Rightarrow \exists z\in E \ (x,z)\in\sigma \wedge (z,y)\in\sigma \overset{\exists z\in E}{\Rightarrow} x\sigma z \wedge z\sigma y \overset{\sigma \text{ μεταβατική}}{\Rightarrow} x\sigma y$

Άρα $\sigma\circ\sigma = \sigma \Rightarrow (x,y)\in\sigma$

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\sigma\circ\sigma\subseteq\sigma$

Έστω $x,y,z\in E$ ώστε $x\sigma y \wedge y\sigma z \Rightarrow (x,y)\in\sigma\wedge(y,z)\in\sigma \Rightarrow (x,z)\in\sigma\circ\sigma \Rightarrow (x,z)\in\sigma$
$\Rightarrow x\sigma z$

π.χ. (i) Έστω $E=\{1,2,3,4\}$ κ' $\sigma=\{(2,2),(2,3),(4,3)\}$

Η σ δεν είναι αυτοπαθής αφού $(1,1)\notin\sigma$

Η σ δεν είναι συμμετρική αφού $(2,3)\in\sigma$ ενώ $(3,2)\notin\sigma$

$\sigma\cap\sigma^{-1}=\{(2,2),(2,3),(4,3)\}\cap\{(2,2),(3,2),(3,4)\}=\{(2,2)\}\subseteq\Delta_E$

άρα η σ είναι αντισυμμετρική

$\sigma\circ\sigma=\{(2,2),(2,3)\}\subseteq\sigma$, άρα η σ είναι μεταβατική.

(ii) Δίνεται η διμελής σχέση στο $\mathbb{R}$ $\sigma=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} : x+y=10\}$

Η σ δεν είναι αυτοπαθής αφού $3+3\neq10$

$(3,3)\notin\sigma$

$(3\not\sigma 3)$

Η σ είναι συμμετρική: $\forall x,y\in\mathbb{R}$ $x\sigma y \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y+x=10 \Rightarrow y\sigma x$

Η σ δεν είναι αντισυμμετρική: π.χ. $3,7\in\mathbb{R}$ με $3\sigma7$ $7\sigma3$ $3\neq7$

(αφού $3+7=10$) (αφού $7+3=10$)

Η σ δεν είναι μεταβατική: $3\sigma7$ $7\sigma3$ $3\not\sigma3$ $\left[\begin{matrix}x=3\\y=7\\z=3\end{matrix}\right]$

$(3+7=10)$ $(7+3=10)$ $(3+3\neq10)$

(iii) Μια σχέση ενδέχεται να είναι ταυτόχρονα συμμετρική κ' αντισυμμετρική.

Αν $\sigma \subseteq E \times E$ σ συμμετρική $\wedge$ σ αντισυμμετρική

$\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1} \wedge \sigma \cap \sigma^{-1} \subseteq \Delta_E$

$\Leftrightarrow \sigma = \sigma^{-1} \wedge \sigma \subseteq \Delta_E$

$\Leftrightarrow \sigma \subseteq \Delta_E$

Άρα τέτοιες σχέσεις είναι τα υποσύνολα της διαγωνίου του E

π.χ. Αν $E = \{1, 2, 3, 4\}$ κ' $\sigma = \{(2,2), (3,3)\}$

η σ είναι συμμετρική κ' αντισυμμετρική

(iv) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ορίζουμε την σ ως εξής:

$\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |x| + |y| = 4\}$

σε δεν είναι ανακλαστική, διότι $3 \not\sigma 3$ (αφού $|3| + |3| = 3 + 3 = 6 \neq 4$)

κ' είναι συμμετρική ($\forall x, y \in \mathbb{Z} : x\sigma y \Rightarrow |x| + |y| = 4 \Rightarrow |y| + |x| = 4 \Rightarrow y\sigma x$)

Η σ δεν είναι αντισυμμετρική (αφού π.χ. $1\sigma 3$, $3\sigma 1$ κ' $1 \neq 3$

Η σ όχι μεταβατική $1\sigma 3$ $3\sigma 1$ κ' $1 \not\sigma 1$

(v) Στο σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών ορίζουμε σχέση σ ως εξής:

$\alpha \sigma \beta \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \quad 2\beta = k\alpha$ $\left(\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ \frac{2\beta}{\alpha} = k \Leftrightarrow \frac{2\beta}{\alpha} \in \mathbb{N} \right)$

Η σ είναι ανακλαστική, διότι $\forall x \in \mathbb{N}$ $\frac{2x}{x} = 2 \in \mathbb{N}$, άρα $x\sigma x$

Η σ δεν είναι συμμετρική $1\sigma 4$ $\left(\frac{2 \cdot 4}{1} = \frac{8}{1} = 8 \in \mathbb{N}\right)$, ενώ $4 \not\sigma 1$ (διότι $\frac{2 \cdot 1}{4} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$)

Η σ δεν είναι αντισυμμετρική, διότι $1\sigma 2$ (αφού $\frac{2 \cdot 2}{1} = 4 \in \mathbb{N}$)

$2\sigma 1$ (αφού $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \in \mathbb{N}$) κ' $1 \neq 2$

Η σ δεν είναι μεταβατική $4\sigma 2$ διότι $\frac{2 \cdot 2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \in \mathbb{N}$) κ' $4 \not\sigma 1$

$2\sigma 1$ (διότι $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \in \mathbb{N}$)

X

ω) Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών ορίζουμε τη σχέση $\mathbb{Z}$ ως εξής:

$x \sigma y \Leftrightarrow \{\exists k \in \mathbb{Z} \quad y = 2kx$

$[\Leftrightarrow (x \neq 0$ κ' $\frac{y}{2x} \in \mathbb{Z})$ ή $(x = y = 0)\}$

Η σ δεν είναι αυτοπαθής

$1 \not\sigma 1$

$[1 \sigma 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad 1 = 2k \cdot 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad k = \frac{1}{2}$ που δεν ισχύει$]$

Η σ δεν είναι συμμετρική

$3 \sigma 6$ (αφού $k = 1 \in \mathbb{Z}$ $6 = 2 \cdot 1 \cdot 3$)

ενώ $6 \not\sigma 3$ $\left(\begin{array}{l}\text{αν } 6 \sigma 3 \\ \text{τότε } \exists k \in \mathbb{Z} \quad 3 = 2k \cdot 6 \quad k = \frac{1}{4}\end{array}\right)$

Η σ είναι αντισυμμετρική

Έστω $x, y \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \sigma y$ κ' $y \sigma x$ $\quad \exists \lambda \in \mathbb{Z} \quad x = 2\lambda y$

$y = 2k(2\lambda y) \Rightarrow y = 4k\lambda y \Rightarrow y(1 - 4k\lambda) = 0$

$\Rightarrow y = 0$ ή $4k\lambda = 1$

$\Rightarrow y = 0$ ή $k\lambda = \frac{1}{4}$

Όμως γινόμενο δύο ακεραίων είναι ακέραιος άρα δεν μπορεί να ισχύει

$k\lambda = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow y = 0?$

Από τη (2) συμπεραίνουμε $x = 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y$

Η σ είναι μεταβατική $\forall x, y \in \mathbb{Z}$

$\left.\begin{array}{l} x \sigma y \\ y \sigma z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = 2kx \\ \exists \lambda \in \mathbb{Z} \quad z = 2\lambda y \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2\lambda(2kx) \Rightarrow z = 2(2k\lambda)x$

Το $2k\lambda$ είναι ακέραιος ως γινόμενο τριών ακεραίων. Άρα $x \sigma z$